Grenzfläche zwischen superfluidem und normalfluidem ^{4}He unter Einfluß von Gravitation und Wärmestrom

Rudolf Haussmann

Universität Konstanz

Grundlagenforschung im Weltraum
Deutschlands Herausforderungen der nächsten Dekaden
Wissenschaftliches Symposium

München, 12.-13. Juni 2008

Wärmetransport in ^{4}He

$T > T_\lambda$: Wärmediffusion $\rightarrow$ inhomogener Zustand

$$\mathbf{Q} = -\lambda \nabla T$$

$T < T_\lambda$: Wärmekonvektion $\rightarrow$ homogener Zustand

$$\mathbf{Q} = \rho s T \mathbf{v}_n = \rho_s s T (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$$

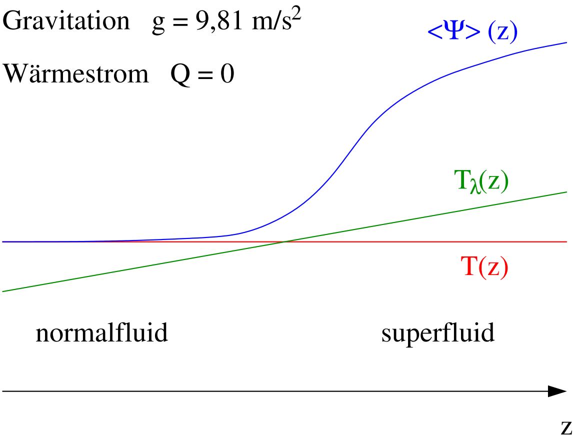
Superfluider Zustand wird beschrieben durch

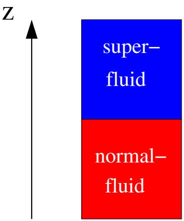
- Ordnungsparameter $\psi(\mathbf{r}, t) = \eta(\mathbf{r}, t) \cdot \exp[i\varphi(\mathbf{r}, t)]$
- Wellenvektor $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$
- superfluide Geschwindigkeit $\mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t) = (\hbar/m_4) \cdot \mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$

Folgerung: $\mathrm{rot}\, \mathbf{v}_s = \nabla \times \mathbf{v}_s \neq 0$ nur auf Wirbellinien

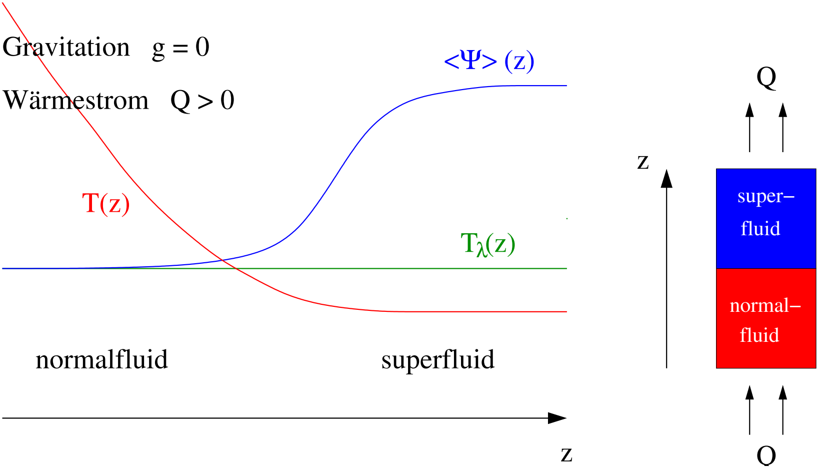
Einfluß der Gravitation

Profile von Ordnungsparameter und Temperatur





Profile von Ordnungsparameter und Temperatur



Charakteristische Längen

Korrelationslängen ξ hängen ab von

Temperatur: $$\xi = \xi_0 \left| \frac{T - T_\lambda}{T_\lambda} \right|^{-\nu} \sim |T - T_\lambda|^{-0{,}671}$$

Gravitation: $$\xi_g \approx \xi_0 \left[\frac{\xi_0}{T_\lambda} \frac{dT_\lambda}{dz} \right]^{-\nu/(1+\nu)} \sim g^{-0{,}402}$$

Wärmestrom: $$\xi_Q \approx \left(\frac{g_0 k_B T_\lambda}{Q} \right)^{1/(d-1)} \sim Q^{-0{,}5}$$

divergieren am kritischen Punkt $(T, g, Q) \to (T_\lambda, 0, 0)$

Auf der Erde: $\xi_g \approx 100\,\mu\mathrm{m}$

- Gravitation dominiert für $\xi_g < \xi_Q \quad \to \quad Q \lesssim 65\,\mathrm{nW/cm^2}$
- Wärmestrom dominiert für $\xi_Q < \xi_g \quad \to \quad Q \gtrsim 65\,\mathrm{nW/cm^2}$

Modell F (Hohenberg und Halperin 1977)

Hydrodynamisches Modell mit Fluktuationen
für Ordnungsparameter $\psi(\mathbf{r}, t)$ und Entropiedichte $m(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -2\Gamma_0 \frac{\delta H}{\delta \psi^*} + i g_0 \psi \frac{\delta H}{\delta m} + \theta_\psi \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= \lambda_0 \nabla^2 \frac{\delta H}{\delta m} - 2 g_0 \mathrm{Im} \left(\psi^* \frac{\delta H}{\delta \psi^*} \right) + \theta_m \end{aligned}$$

mit Energiefunktional

$$H = \int d^d r \left[\frac{1}{2} \tau_0 |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \tilde{u}_0 |\psi|^4 + \frac{1}{2} \chi_0^{-1} m^2 + \gamma_0 m |\psi|^2 - h_0 m \right]$$

und stochastischen Kräften $\theta_\psi(\mathbf{r}, t)$ und $\theta_m(\mathbf{r}, t)$

$$\langle \theta_\psi(\mathbf{r}, t) \rangle = 0 \quad , \quad \langle \theta_\psi(\mathbf{r}, t) \theta_\psi^*(\mathbf{r}', t') \rangle = 4\Gamma_0' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$$

$$\langle \theta_m(\mathbf{r}, t) \rangle = 0 \quad , \quad \langle \theta_m(\mathbf{r}, t) \theta_m(\mathbf{r}', t') \rangle = -2\lambda_0 \nabla^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$$

Näherung

$1/N$-Entwicklung im Grenzfall $N \to \infty$ (Hartree-Näherung):

- Erwartungswerte werden faktorisiert $\langle ... \rangle = \langle .. \rangle \cdot \langle . \rangle$

Die Variablen sind folglich

- mittlerer Ordnungsparameter $\langle \psi \rangle$
- mittlere Entropiedichte $\langle m \rangle$ und Temperaturen T und T_λ
- Kondensatdichte $n_s = \langle |\psi|^2 \rangle = |\langle \psi \rangle|^2 + \langle |\delta\psi|^2 \rangle$
- superfluide Stromdichte
  $\mathbf{J}_s = \langle \mathrm{Im}[\psi^* \nabla \psi] \rangle = \mathrm{Im}[\langle \psi^* \rangle \nabla \langle \psi \rangle] + \langle \mathrm{Im}[\delta\psi^* \nabla \delta\psi] \rangle$

Es gibt zwei Beiträge zu n_s und $\mathbf{J}_s$. Folglich gibt es zwei superfluide Phasen:

- erster Term dominiert $\rightarrow$ superfluid ohne Wirbel
- zweiter Term dominiert $\rightarrow$ superfluid mit Wirbel

Gleichungen

$$\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial t} = -\Gamma_0[r_1 - \nabla^2]\langle\psi\rangle + i\frac{g_0}{2\chi_0\gamma_0}\Delta r_0\langle\psi\rangle$$

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t} + \nabla\mathbf{q} = 0 \qquad \text{mit} \quad \mathbf{q} = -\frac{\lambda_0}{2\chi_0\gamma_0}\nabla\Delta r_0 - g_0\mathbf{J}_s$$

wobei

$$\begin{aligned}
\Delta r_0 &= 2\chi_0\gamma_0\left[\chi_0^{-1}\langle m\rangle + \gamma_0 n_s - h_0\right] = 2\chi_0\gamma_0\frac{T - T_0}{T_\lambda} \\
r_0 &= \tau_0 + 2\chi_0\gamma_0 h_0 + \Delta r_0 \\
&= \tau_0 + 2\chi_0\gamma_0\left[\chi_0^{-1}\langle m\rangle + \gamma_0 n_s\right] = 2\chi_0\gamma_0\frac{T - T_\lambda}{T_\lambda} \\
r_1 &= r_0 + 4u_0 n_s
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
n_s &= \langle|\psi|^2\rangle = |\langle\psi\rangle|^2 + \langle|\delta\psi|^2\rangle \\
\mathbf{J}_s &= \langle\mathrm{Im}[\psi^*\nabla\psi]\rangle = \mathrm{Im}[\langle\psi^*\rangle\nabla\langle\psi\rangle] + \langle\mathrm{Im}[\delta\psi^*\nabla\delta\psi]\rangle
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von n_s und $\mathbf{J}_s$ wird eine Greenfunktion für räumlich inhomogene Systeme benötigt:

$$\langle \delta\psi^*(\mathbf{r},t)\delta\psi(\mathbf{r}',t)\rangle = G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\ \exp[i\,\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\ G(\mathbf{k})$$

mit

$$G(\mathbf{k}) = 2\int_0^\infty d\alpha\ \exp(-\alpha r_1 - \alpha^3 s)\ \exp\left(-\alpha\left[\mathbf{k} - \alpha\left(\frac{g_0\nabla(\Delta r_0)}{8\chi_0\gamma_0\Gamma_0'}\right)\right]^2\right)$$

und

$$s = -\frac{1}{12}\left[(\nabla r_1)^2 + 2\frac{\Gamma_0''}{\Gamma_0'}\left(\frac{g_0\nabla(\Delta r_0)}{8\chi_0\gamma_0\Gamma_0'}\right)\cdot(\nabla r_1) - \left(\frac{g_0\nabla(\Delta r_0)}{8\chi_0\gamma_0\Gamma_0'}\right)^2\right]$$

$\Longrightarrow$ hängt ab von Temperaturgradienten ∇T und ∇T_λ

Am kritischen Punkt $(T, g, Q) \to (T_\lambda, 0, 0)$

- werden Fluktuationen groß
- divergiert die Korrelationslänge $\xi \to \infty$

$\Longrightarrow$ Renormierungsgruppentheorie anwenden

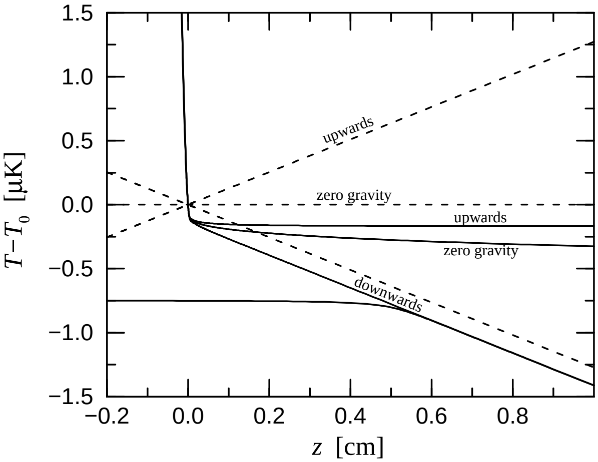
- kritische Exponenten $\alpha,\ \nu,\ \ldots$
- Renormierungsfaktoren $Z_\psi[\tau],\ Z_m[\tau],\ \ldots$
- laufende Parameter $u[\tau], \gamma[\tau], w'[\tau], w''[\tau], F[\tau]$
- Flußparameter τ

Kritische Exponenten und laufende Parameter sind bekannt

$\Longrightarrow$ explizite Vorhersagen sind möglich

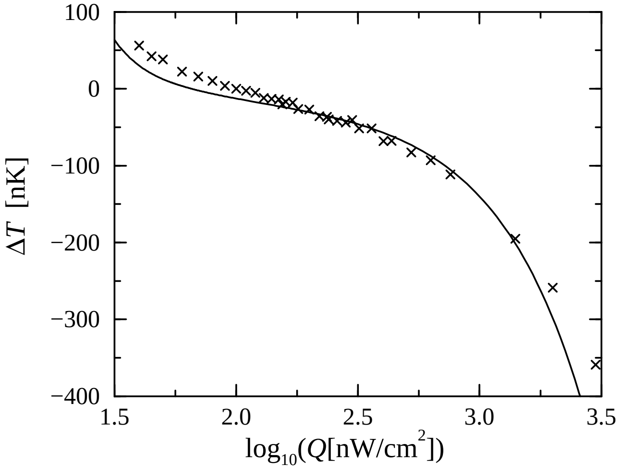
Ergebnis: Temperaturprofil

Wärmestrom $Q = 1\,\mu\mathrm{W}/\mathrm{cm}^2$



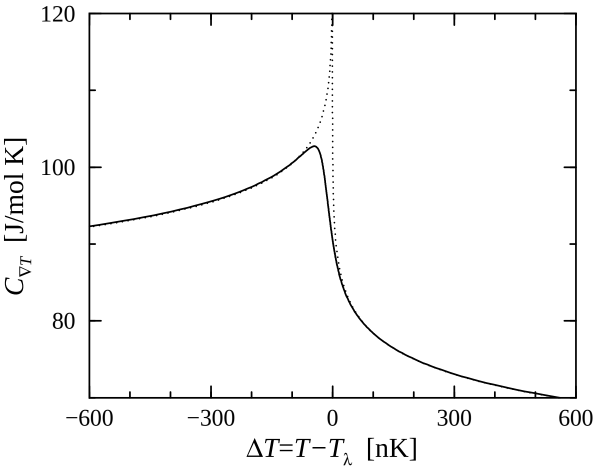
Selbstorganisierter kritischer Zustand

$$\nabla T = \nabla T_\lambda \quad \Longrightarrow \quad T(z) - T_\lambda(z) = \Delta T(Q) \quad \text{räumlich konstant}$$



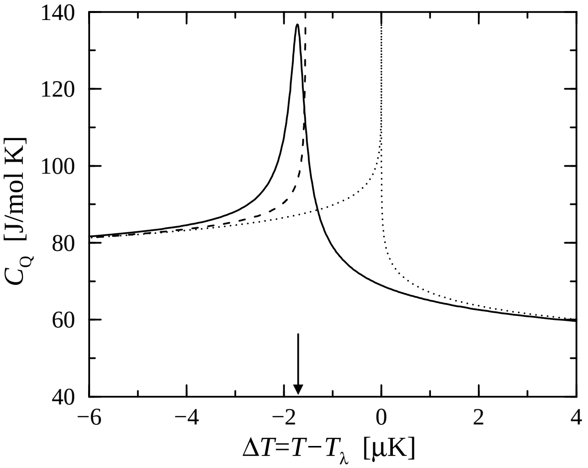
Selbstorganisierter kritischer Zustand

$\nabla T = \nabla T_\lambda \quad \Longrightarrow \quad$ spezifische Wärme $C_{\nabla T}$



Räumlich inhomogener Zustand im Nichtgleichgewicht

spezifische Wärme C_Q für Wärmestrom $Q = 43\,\mu\mathrm{W/cm^2}$



Vergleich mit Experimenten

Selbstorganisierter kritischer Zustand $\nabla T = \nabla T_\lambda$

- Temperaturverschiebung $T(z) - T_\lambda(z) = \Delta T(Q)$
- spezifische Wärme $C_{\nabla T}$
- halber Schall $v_{1/2} = -[C_{\nabla T}(\partial \Delta T / \partial Q)]^{-1}$

Räumlich inhomogener Zustand im Nichtgleichgewicht

- Temperaturprofil $T(z)$
- lokale Wärmeleitfähigkeit $\mathbf{Q} = -\lambda \nabla T$
- spezifische Wärme C_Q

Test der Renormierungsgruppentheorie im Weltraum

- Gravitation $g \to 0$
- Skalierung und Universalität
  am kritischen Punkt $(T, g, Q) \to (T_\lambda, 0, 0)$

Weltraumexperiment DX-CQ